"Чудеса треугольника Паскаля"

Паников Егор

МОУ "Лицей №26", г. Подольск, Московская обл., Россия

Консультант: Попова Людмила Анатольевна, учитель информатики

Аноттация: в данной работе ставятся и доказываются гипотезы что числа треугольника Паскаля обладают особыми свойствами, треугольник можно считать уникальным для решения различных задач; приводятся примеры задач с их решением; описывается построение треугольника Паскаля и свойства чисел входящих в его состав; приводятся исторические справки.

Ключевые слова: Треугольник Паскаля, числа Фибоначчи, треугольные числа, бином Ньютона, простые числа.

Введение

Цель исследования: провести анализ свойств чисел треугольника Паскаля и исследовать возможности применения этих свойств для решения различных задач

Задачи исследования:

1.Выявить свойства чисел, входящих в состав треугольника Паскаля;
2. Определить применение свойств чисел треугольника Паскаля для быстрого и без ошибочного решения задач;
3. Сформулировать вывод и итоги исследования

> *«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике»*
>
> Мартин Гарднер

Гипотеза:

Если числа треугольника Паскаля обладают особыми свойствами, то его можно считать уникальным для решения различных задач

Ход исследования:

- ✓ Историческая справка;
- ✓ Как устроен треугольник Паскаля;
- ✓ Свойства чисел треугольника Паскаля;
- ✓ Применение треугольника Паскаля для решения задач.

Историческая справка:

Блез Паскаль, французский философ и математик, живший в 1600-х годах.

Треугольник Паскаля названа в честь Блеза Паскаля, но оказывается, что его строение было известно задолго до описания его Паскалем. Паскаль описал эту систему расположения чисел в своей работе *Traité du triangle arithmétique* "(1653г) и поэтому он был назван треугольником Паскаля.

«Математик Дональд Кнут (родился в 1938 г.) однажды заметил, что в треугольнике Паскаля заложено столько последовательностей и закономерностей, что когда в нем находят нечто новое, этому уже никто, кроме самого исследователя, не удивляется. Тем не менее увлекательные исследования обнаружили огромное количество чудес, заключенных в треугольнике, таких, как необычные геометрические закономерности на диагоналях, существование квадратных узоров, расширения треугольников и их связь с отрицательными целыми числами и большими размерностями»

Журнал «Информатика» №2/2013

Как устроен треугольник Паскаля

В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел (рис.1). Все элементарно, но, сколько в этом таится чудес.

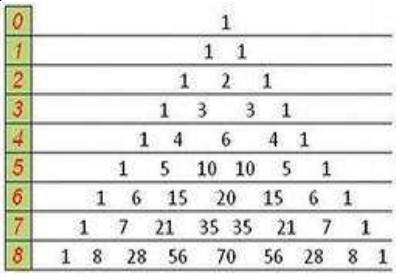


Рис.1

Свойства чисел треугольника Паскаля

Свойство1 (основное). Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел (рис.2). Треугольник можно продолжать неограниченно.

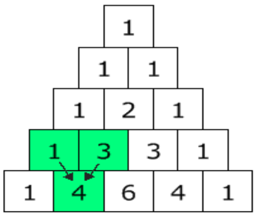
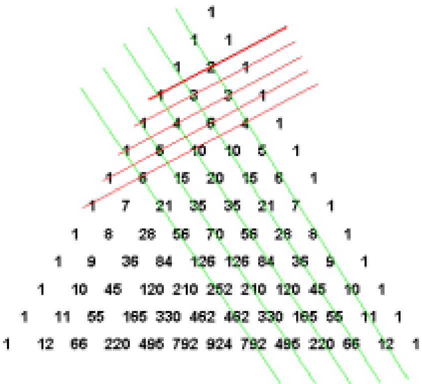


Рис.2

Свойство2. Вдоль диагоналей, параллельных сторонам треугольника (на рис.3 отмечены зелеными линиями) выстроены треугольные числа (Рис.4) и их обобщения на случай пространств всех размерностей.



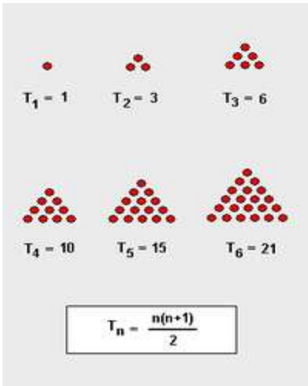


Рис.3 Рис.4

Первая диагональ треугольника Паскаля (первая зеленая линия Рис.3) – это натуральные числа, идущие по порядку.

Треугольные числа показывают, сколько касающихся кружков можно расположить в виде треугольника (Рис.4).

Числа Фибоначчи, треугольник Паскаля и связь между ними

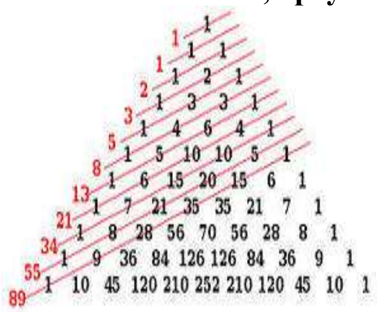


Рис.5

Паскаль, наверное, не знал, что числа Фибоначчи скрыты в его треугольнике. Это обстоятельство было обнаружено только в XIX веке (Чи́сла Фибона́ччи — элементы числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел).
Красным цветом выделены числа Фибоначчи (Рис.5).
Свойство3.Сумма чисел n-й диагонали есть n-е число Фибоначчи.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля и связь между ними

Рис.5

Свойство4. Числа, стоящие на горизонтальных строках треугольника Паскаля, - это биномиальные коэффициенты, то есть коэффициенты разложения $(x+y)^n$ по степеням x и y.Формула коэффициентов в биноме записывается так: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (1)

Треугольник Паскаля и степени двойки

Сумма чисел, стоящих в любой строке треугольника, вдвое больше суммы чисел, стоящей в предыдущей строке, поскольку при построении каждой строки числа, стоящие в предыдущей, сносятся дважды. Сумма чисел первой (самой верхней) строки равна 1. Следовательно, суммы чисел, стоящих в строках треугольника Паскаля, образуют геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем 2: 1, 2, 4, 8, ... Десятая степень числа 2 равна 1024.
Свойство5. Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.
Свойство6. Сумма чисел, стоящих на четных места, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах и каждая из них составляет 2^{n-1}

Как используются свойства чисел треугольник Паскаля?

ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ В АЛГЕБРЕ

Допустим, мы хотим возвести выражение $(a+b)$ в некоторую степень (например, 1, 2, 3, 4, 5...). Различные степени $(a+b)$ будут выглядеть следующим образом (Таблица1):

Таблица1

$(a+b)^0 =$					1				
$(a+b)^1 =$				1a	+	1b			
$(a+b)^2 =$			$1a^2$	+	2ab	+	$1b^2$		
$(a+b)^3 =$		$1a^3$	+	$3a^2b$	+	$3ab^2$	+	$1b^3$	
$(a+b)^4 =$	$1a^4$	+	$4a^3b$	+	$6a^2b^2$	+	$4ab^3$	+	$1b^4$

Числа обозначение красным цветом соответствуют числам в треугольнике Паскаля.
Биномиальные коэффициенты есть коэффициенты разложения многочлена по степеням a и b
Всё не так сложно и запоминается на всю жизнь!
Например:
Найти разложение: $(x+2)^4$
Решение:
Выписываем разложение с неопределенными коэффициентами:
$$(a+b)^4 = A_0 b^4 + A_1 ab^3 + A_2 a^2 b^2 + A_3 a^3 b + A_4 a^4$$
В данном примере a=x, b=2 и n=4, т.е. нужно взять четвертую строку треугольника (где справа стоит n=4 Рис.5).
Подставляем вместо a=x и b=2, получаем:
$$(x+2)^4 = A_0 2^4 + A_1 x 2^3 + A_2 x^2 2^2 + A_3 x^3 2 + A_4 x^4 = 16A_0 + 8A_1 x + 4A_2 x^2 + 2A_3 x^3 + A_4 x^4$$
Теперь берем значения из четвертой строки треугольника и подставляем их по очереди вместо коэффициентов:
$$(x+2)^4 = 16\cdot 1 + 8\cdot 4x + 4\cdot 6x^2 + 2\cdot 4x^3 + 1x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$$
Ответ: $(x+2)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

СУММА ЧИСЕЛ
Чтобы найти сумму чисел, стоящих на любой диагонали от начала до интересующего нас места, достаточно взглянуть на число, расположенное снизу и слева от последнего слагаемого (слева для правой диагонали, для левой диагонали будет справа, а вообще - ближе к середине треугольника). Пусть, например, мы хотим вычислить сумму чисел натурального ряда от 1 до 9. "Спустившись" по диагонали до числа 9, мы увидим слева снизу от него число 45 (Рис.6) Оно то и дает искомую сумму.

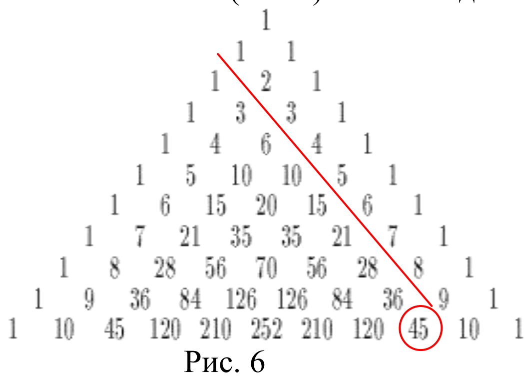


Рис. 6

СТЕПЕНИ ЧИСЛА 11

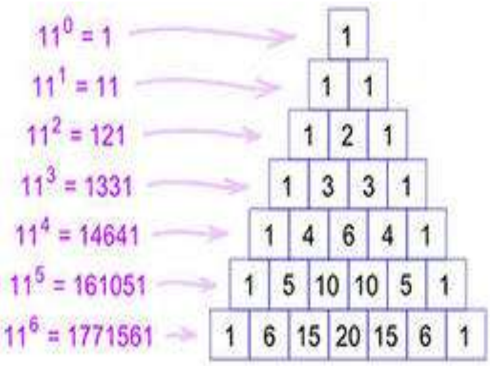


Рис. 7

Если надо вычислить степени числа 11, то для этого может быть использован... треугольник Паскаля (Рис. 7). Цифры, расположенные в третьей, четвертой и пятой строках, образуют число, представляющее собой вторую, третью и четвертую степени числа 11. Значит, для

нахождения искомой степени следует нарисовать треугольник Паскаля с соответствующим количеством строк, а это сделать совсем не сложно. Но не все так просто….
Проблема обнаружилась для пятой и выше степеней (не соответствие). И я её решил.
Например, рассмотрим соответствующую строчку для нахождения пятой степени числа 11. Если число треугольника Паскаля получается двузначным, то справа на лево в старший разряд перебрасываем количество десятков и складываем с числом стоящим слева. Полученная последовательность и есть результат (рис. 8).

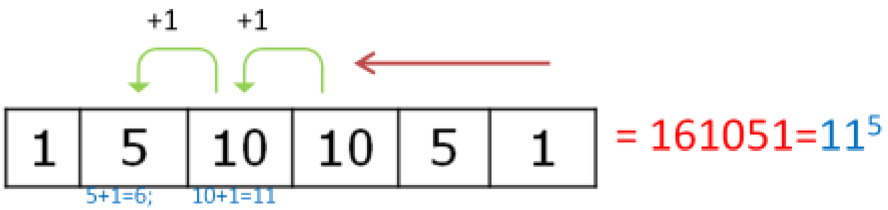


Рис.8

ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА
В город А можно попасть по единственному входу. На каждом перекрёстке дорога расходится на две. В город вошли 2^{10} человек. На каждом перекрёстке они делятся пополам. Сколько человек окажется на каждом перекрёстке, когда они уже не смогут разделиться? Сначала решим задачу, при условии, что в город вошли 16 человек (2^4=16) Рис. 9

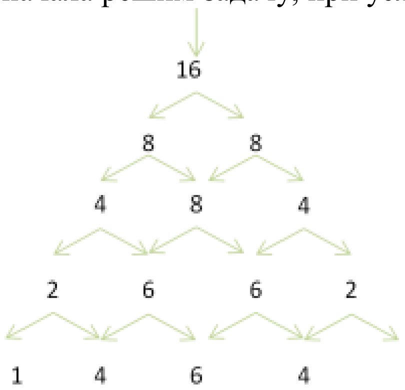


Рис. 9

Решение:
Т.к количество человек 2^{10}, то в треугольнике выделяем 10 строку. Это и есть ответ (рис. 10).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Рис. 10
Ответ: 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 ч.

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача1. Дома в новом поселке требуется окрасить так, чтобы каждый этаж оказался выкрашенным либо в белый, либо в синий цвет. Из эстетических соображений никакие два соседних этажа не должны быть окрашены в синий цвет. Сколькими способами можно окрасить дома в поселке с соблюдением указанных требований, если число этажей заданно.

Решение:

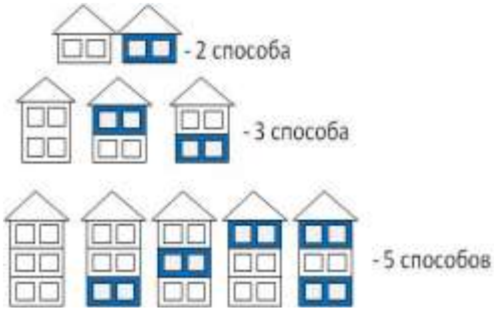


Рис. 11

С увеличением числа этажей, число способов возрастает следующим образом: 2,3,5,8,… (рис 11). Эта последовательность совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи, у которой отброшены первые члены (1 и 1) рис. 12.

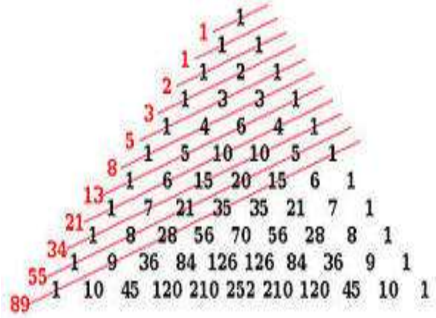


Рис. 12

Для решения задачи находим сумму чисел в (n+2)-й красной диагонали, где n – количество этажей. Для пятиэтажки (n=5), количество способов находится как сумма чисел 7-й диагонали (что соответствует седьмому числу последовательности Фибоначчи).

Задача2. Рассмотрим ряд из n стульев. Сколькими способами можно рассадить на них мужчин и женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом? При n=1, 2, 3, 4, ... число способов соответственно равно 2, 3, 5, 8, ..., то есть совпадает с числами Фибоначчи Число, показывающее, сколькими способами можно выбрать n элементов из множества, содержащего r различных элементов, стоит на пересечении n-ной диагонали и r-ой строки.

Задача3. Сколькими различными способами можно составить букет из 3-х различных цветов, если имеется 7 наименований цветов?

Для ответа на этот вопрос необходимо лишь найти число, стоящее на пересечении диагонали 3 и строки 7: оно оказывается равным 35. Рис. 13

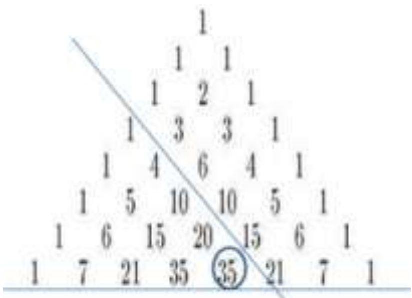


Рис. 13

Если мы перепутаем номера диагонали и строки и будем искать число, стоящее на пересечении диагонали 7 со строкой 3, то обнаружим, что они не пересекаются. То есть сам метод не дает нам ошибиться!

КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть подбросили 3 монеты. Возможных исходов бросания трех монет: ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РГР, РРГ, РРР. Нетрудно видеть, что три герба выпадают лишь в одном случае, два герба - в трех случаях, один герб - также в трех случаях и ни одного герба - в одном случае. Числа благоприятных испытаний для получения 3, 2, 1 и 0 гербов равны 1, 3, 3, 1. Именно эти числа стоят в третьей строке треугольника Паскаля (рис.14).

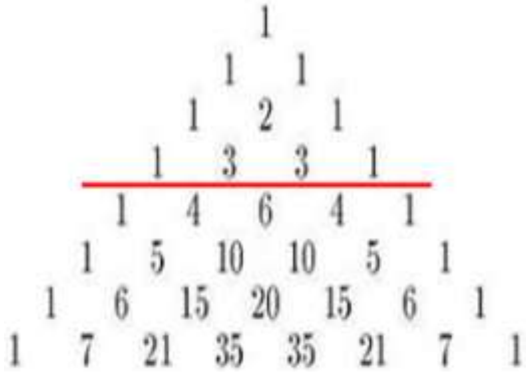


Рис. 14

Ещё пример:

Найти вероятность выпадения ровно 5 гербов при одновременном бросании 10 монет.

Решение:

1.Подсчитаем, сколько существуют различных способов, позволяющих выбрать 5 монет из 10. Ответ мы получим, найдя число, стоящее на пересечении 5-й диагонали и 10-й строки. Оно равно 252.

2. Сложим все числа, стоящие в 10-й строке. Сумма этих чисел равна 2^{10}. Десятая степень числа 2 равна 1024.

3.Вероятность выпадения пяти гербов при бросании 10 монет равна 252/1024= 63/256=0,24609375≈0,2

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Треугольник Паскаля изобразим несколько другим образом (Таблица 2):

Таблица 2

0	1																							
1			1	1																				
2					1	2	1																	
3							1	3	3	1														
4									1	4	6	4	1											
5											1	5	10	10	5	1								
6													1	6	15	20	15	6	1					
7															1	7	21	35	35	21	7	1		
8																	1	8	28	56	70	56	28	8
9																			1	9	36	84	126	126
10																					1	10	45	120
11																							1	11
12																								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Во-первых, строки сдвинуты так, что первые элементы образуют «лесенку» со ступеньками размером в два шага. Во-вторых, те элементы, которые делятся на номер своей строки k, отмечены зеленным цветом, а те, которые не делятся на k, - красным.

Столбцы были также пронумерованы числами 0, 1,2, ….А цвета распределились так: если все элементы такого «сдвинутого» треугольника Паскаля, стоящие в k-м столбце, зеленые, то и k-й номер столбца – тоже зеленый; если хотя бы один элемент в столбце красный, то и номер этого столбца красный. Особыми случаями остались первые два столбца.
Зеленые номера столбцов – простые числа. Эту связь треугольника Паскаля с простыми числами обнаружили лишь в XX веке в 1972 году Г.В. Манн и Д. Шенкс, отлаживая программу на компьютере.

Подтверждение гипотезы

Анализируя решаемые в данной работе задачи, я пришёл к выводу:
ОБЛАДАЯ ТАКИМИ СВОЙСТВАМИ, ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ МОЖЕТ СЧИТАТЬСЯ УНИКАЛЬНЫМ, ИСПОЛЬЗОВАТЬСЯ ДЛЯ БЫСТРОГО И ВЕРНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Литература и интернет - источники:

Газета «Информатика» №19,20/2005
Газета «Информатика» №10/2006
Энциклопедия для детей. Т.11. Математика/ Сост. Аксенова М.Д. – М.: Аванта+, 2002.
Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Савин А.П. – Педагогика, 1989.
Трилогия о математике/А. Реньин – МИР, 1980
Блез Паскаль/ Е. Мурашова – Белый Город, 2006
http://ru.wikipedia.org/wiki/Треугольник_Паскаля http://biostudlife.hiblogger.net http://www.arbuz.uz/u_treug.html http://image.websib.ru/07/text_article.htm?342