II-Я ШКОЛЬНАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ СЕКЦИЯ

СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МГОУ

"Первые шаги в науку"

Направление: математика

«Без калькулятора к ГИА или некоторые приемы быстрого счета»

Автор работы: Паников Егор

Образовательное учреждение:

МОУ «Лицей №26» г. Подольск

Класс: 9

Руководитель работы:

Попова Людмила Анатольевна,

учитель информатики

2014 г.

Введение:

Каждый день на уроках математики мы узнаем о свойствах чисел и фигур, как складывать дроби, как решать уравнения, строить графики функций и т.д. Но про то, когда были придуманы числа, кем и когда были придуманы дроби, где впервые стали решать задачи с помощью уравнений, когда возникли отрицательные числа, - про все это в учебниках сказано очень мало. Не говорится и о том, как применяют математику в различных играх, как ее используют для тайнописи, какими удивительными свойствами обладают некоторые числа.

Я начну свою работу с рассказа, как люди считали, не применяя вычислительных машин. Как можно обойтись без машин, позволяющих делать миллионы операций в секунду. Для этого нам придется побывать в древнем Египте и средневековой России. Познакомится с великими математиками: Мухаммедом из Хорезми, Паскалем, Непером, Трахтенбергом. А потом вернутся опять в школу, и вспомнить правила сокращенного умножения.

Человек всегда искал инструмент для того, что бы избавить себя от счета «в ручную». Но инструмент ему был нужен для больших и сложных калькуляций. А в нашем, в современном мире, все стараются использовать калькуляторы даже для небольших вычислений, что не дает возможность развивать, тренировать ум и память.

В школе, на различных экзаменах, пользоваться калькуляторами запрещено. Поэтому я решил найти и исследовать различные приемы быстрого счета, которые помогут верно, и быстро решать вычислительные задачи, не прибегая к вычислительным машинам.

В каждой главе я рассматриваю примеры вычислений разными методами. Что бы справится с ними, нужна смекалка, настойчивость и целеустремленность.

Цель работы: Исследовать различные приемы быстрого счета для успешного сдачи ГИА

Задачи:

1)Изучить материал о способах счета.
2) Доказать с помощью математических формул справедливость различных способов быстрого счета.
3) Научиться и научить одноклассников системе быстрого счета для успешного сдачи ГИА.
4) Провести мониторинг среди одноклассников.

Объект исследования: арифметические операции над числами.

Метод: поиск и доказательство.

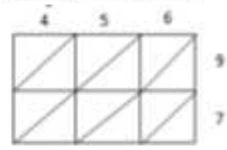
Гипотеза: с помощью систем быстрого счета можно сократить время расчетов и не сделать ошибок.

Ход работы:

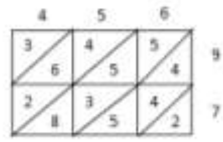
1. Умножение решёткой (Приложение 1)

В средневековой Европе был широко распространен способ умножения многозначных чисел, известный как “умножение решеткой”, или “способ жалюзи”, который предлагал Мухаммед из Хорезми. Этот способ проще, чем применяемый в школе и был очень распространен на Востоке и в Италии.

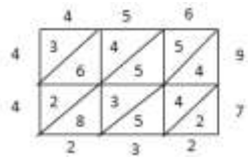
Этот способ легко уяснить на примере. Пусть необходимо умножить 456 на 97. Рисуется табличка из трех столбцов (число 456 — трехзначное) и двух строк (97 — двузначное число), каждая клетка, которой разделена диагональю так, как показано на рисунке.



Цифры чисел 456 и 97 записываются, соответственно, над табличкой и справа от нее. После этого в каждую клетку записывается произведение цифры, стоящей в соответствующем столбце сверху, на цифру в соответствующей строке справа, причем десятки и единицы произведения разделяются упомянутой выше диагональю.



Теперь можно определить результат умножения. Для этого необходимо просуммировать цифры по наклонным полоскам справа налево, при необходимости перенося “в уме” в соседнюю слева полоску единицу или двойку и записывая эти суммы.



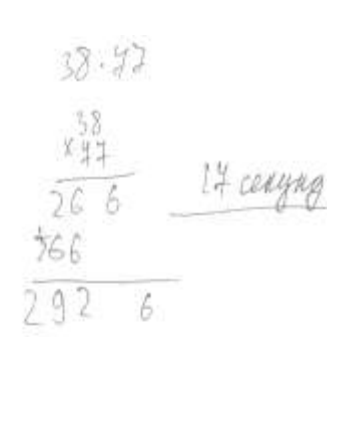
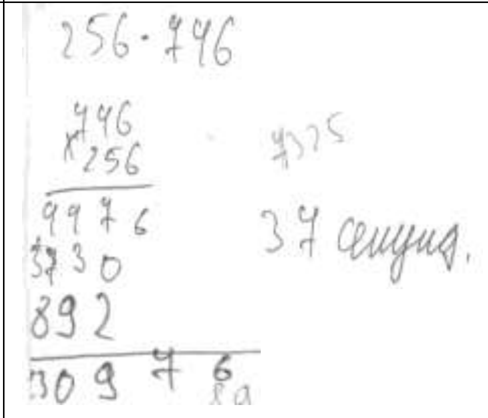
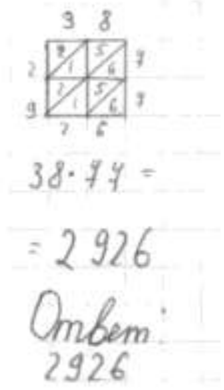
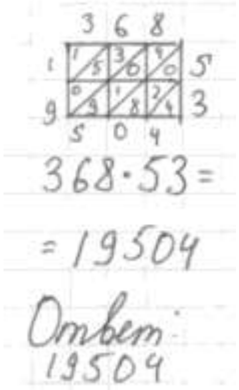
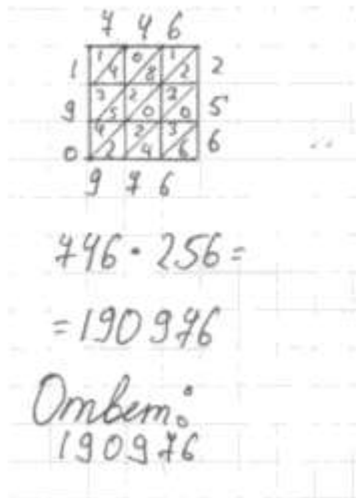
Результат следует читать слева от таблички сверху вниз, а затем под табличкой слева направо — он равен 44 232.

Способ умножения решеткой был положен в основу счетного прибора, описанного шотландским математиком Джоном Непером в 1617 году. Этот простой счетный прибор в дальнейшем получил название “палочки Непера”, “бруски Непера”, “пластины Непера” и т.п.

В течение столетий ученые совершенствовали предложенные ал-Хорезми методы вычисления. Существовало несколько десятков методов умножения и деления многозначных чисел. При одном из методов деления выписанные цифры заполняли рисунок, похожий на старинный корабль галеру. Некоторые люди видели на этом рисунке не только паруса и мачты, но и другие части корабля. Выполнение умножения и деления считалось настолько трудным делом, что владевшие ими ученые переезжали из города в город и за вознаграждение помогали купцам приводить в порядок счета. Таких ученых звали «магистрами (мастерами) деления».

Эксперимент 1

Выполним вычисления и измерим время

<table>
<tr><th>38*77</th><th>53*368</th><th>256*746</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Время затраченное на вычисление классическим методом</td></tr>
<tr><td>17 сек</td><td>20 сек</td><td>37 сек</td></tr>
<tr><td colspan="3">Время затраченное на вычисление «решеткой»</td></tr>
<tr><td>14 сек</td><td>16 сек</td><td>31 сек</td></tr>
</table>

Как видно из таблицы время, затраченное на вычисление решеткой, оказалось меньше, чем время вычисления столбиком.

2. Умножение и двоичная система счисления (Приложение 1)

Двоичная система счисления — основа работы компьютеров. Оказывается, двоичную систему применяли (конечно, сами того не понимая) и древние египтяне (метод древних Египтян).

a) Метод древних Египтян

Для умножения двух натуральных чисел они использовали методику, в которой для вычислений достаточно было уметь складывать, вычитать и умножать на 2. Делалось это так. В двух колонках записывались два числа: 1 и один из сомножителей. Затем в каждой следующей строке под ними записывались числа, в 2 раза большие. Так продолжалось до тех пор, когда в первой колонке получалось число, большее второго множителя. Пример для нахождения произведения 17 на 21:

1	21
2	42
4	84
8	168
16	336
32	

Результат в данном случае получался сложением чисел в правой колонке, которым в левой соответствуют числа 16 и 1: 336 + 21 = 357 (проверили на калькуляторе, что 17 × 21 = 357). А вот почему так получается. Ответ такой:

1. Значения в правой колонке можем записать так:

21		21*1		$21*2^0$
42		21*2		$21*2^1$
84	или	21*4	или	$21*2^2$
168		21*8		$21*2^3$
336		21*16		$21*2^4$

2. Переведем число 17 в двоичную систему методом выделения максимальной степени двойки. 17 = 16 + 1, то есть $17_{10} = 10001_2$. Теперь умножим 17 на 21, но записав число 17 в так называемой “развернутой форме”:
$17 \times 21 = (1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0) \times 21$
или $17 \times 21 =(2^4 + 2^0) \times 21 = 21 \times 2^4 + 21 \times 2^0$.
3. Учитывая последнее равенство, для нахождения произведения 17 на 21 во второй колонке “основной ” таблицы необходимо сложить числа в строках, соответствующих числам 16 и 1, что мы и сделали при вычислениях ранее.

b) «Крестьянский» метод

Похожий метод умножения использовали русские крестьяне (поэтому его называют “крестьянским”). Проиллюстрируем этот метод на примере
нахождения произведения 13 на 18. Нарисуем таблицу, в первой колонке которой запишем число 13, а во второй — 18. Далее каждое следующее число в первой колонке получаем из предыдущего делением нацело на 2, а во второй колонке — умножением предыдущего на 2:

13	18
6	36
3	72
1	144

После того как в первой колонке получим 1, деление и умножение прекратим.
Далее найдем в первой колонке четные числа и вычеркнем строки с ними:

13	18
6	~~36~~
3	72
1	144

Искомое произведение равно сумме оставшихся во втором столбце чисел: 18 + 72 + 144 = 234 (проверили – верно!).

А доказать это можно так:

1. Деление числа 13 на 2 это, по сути, и есть перевод числа 13 в 2-ную систему счисления.
   Переведем число 13 в 2 систему счисления методом деления:
   13:2=6(ост.1)
   6:2=3(ост.0)
   3:2=1(ост.1)
   1:2=0(ост.1)
   Четная цифра дает в остатке 0.
   Получаем: $1101_2=1*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0=13_{10}$
2. Значение в правой колонке можно записать так:

18	или	18*1	или	$18*2^0$
36		18*2		$18*2^1$
72		18*4		$18*2^2$
144		18*8		$18*2^3$

Получаем: $13*18=(1*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0)*18=18*2^3+18*2^2+18*2^0=18+72+144=234$

Эксперимент 2

Вычислим значение выражения 33×18 и сравним время

Вычисление решеткой	«Крестьянский метод»
	
Время, затраченное на вычисления	
8 сек	**25 сек**

Время, затраченное на вычисление методом «решетки», меньше, и значительно, чем «крестьянским» методом.

3. Метод использования дополнений

В 1492 году было определено общее правило использования дополнения до 10. (Дополнение числа *n* равно 10 - *n*). Для умножения 7 на 8 берутся их дополнения: 3 и

2. Разность между любым из двух исходных чисел и ему непарным дополнением определяет цифру десятков, то есть в нашем случае 5, а произведение дополнений определяет вторую цифру результата, то есть $2 \times 3 = 6$, окончательный результат $50 + 6 = 56$ (рис. 1)

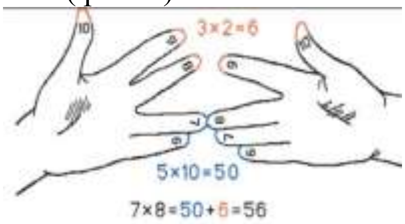


Рис. 1

Применение метода к умножению на пальцах сводилось к следующему. Пальцы каждой руки нумеруются от 6 до 10, начиная с мизинца. Для умножения 7 на 8 палец под номером 7 одной руки соединяется с пальцем под номером 8 другой руки. Дополнением 7 являются три верхних пальца левой руки, а дополнением 8 – два верхних пальца правой руки. Сумма всех остальных пальцев обеих рук определяет цифру десятков; то есть 5. К пятидесяти прибавляем произведение верхних пальцев 2 и 3, ответ равен 56. Этот простой способ использования пальцев для вычисления произведений любой пары чисел широко применялся в период Ренессанса.

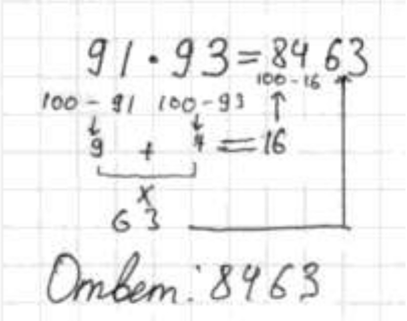
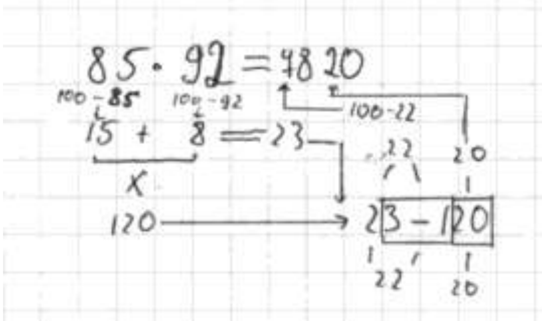
Используя правила дополнения до 100 можно быстро умножать двузначные числа (см. рис. 2 **Приложение 1**)

Рис. 2

Эксперимент 3

Выполним вычисления и измерим время

91*93	85*92
91 · 93 91 × 93 273 + 819 8463 13секунд	85 · 92 85 × 92 170 765 7820 18 секунд

	
Время затраченное на вычисление классическим методом	
13 сек	**18 сек**
Время затраченное на вычисление «дополнением»	
10 сек	**15 сек**

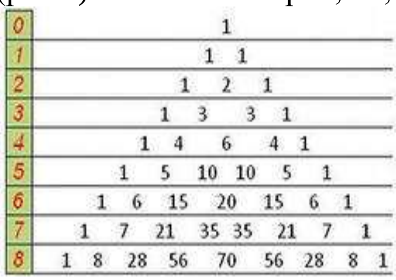
Время, затраченное на вычисление методом дополнений меньше, чем столбиком .

4.Треугольник Паскаля

«Математик Дональд Кнут (родился в 1938 г.) однажды заметил, что в треугольнике Паскаля заложено столько последовательностей и закономерностей, что когда в нем находят нечто новое, этому уже никто, кроме самого исследователя, не удивляется. Тем не менее, увлекательные исследования обнаружили огромное количество чудес, заключенных в треугольнике, таких, как необычные геометрические закономерности на диагоналях, существование квадратных узоров, расширения треугольников и их связь с отрицательными целыми числами и большими размерностями»

Журнал «Информатика» №2/2013

В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Треугольник можно продолжать неограниченно (рис.3). Все элементарно, но, сколько в этом таится чудес.



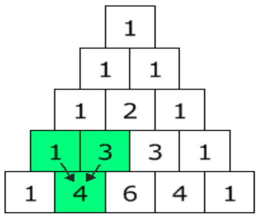


Рис.3

а)Треугольник Паскаля и степени двойки

Сумма чисел, стоящих в любой строке треугольника, вдвое больше суммы чисел, стоящей в предыдущей строке, поскольку при построении каждой строки числа, стоящие в предыдущей, сносятся дважды. Сумма чисел первой (самой верхней) строки равна 1. Следовательно, суммы чисел, стоящих в строках треугольника Паскаля, образуют геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем 2: 1, 2, 4, 8, ... Десятая степень числа 2 равна 1024.

Свойство: Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.

Свойство: Сумма чисел, стоящих на четных места, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах и каждая из них составляет 2^{n-1}

b) Применение треугольника Паскаля в алгебре

Допустим, мы хотим возвести выражение $(a+b)$ в некоторую степень (например, 1, 2, 3, 4, 5...). Различные степени $(a+b)$ будут выглядеть следующим образом (Таблица1):

Таблица1

$(a+b)^0 =$					1				
$(a+b)^1 =$				1a	+	1b			
$(a+b)^2 =$			$1a^2$	+	2ab	+	$1b^2$		
$(a+b)^3 =$		$1a^3$	+	$3a^2b$	+	$3ab^2$	+	$1b^3$	
$(a+b)^4 =$	$1a^4$	+	$4a^3b$	+	$6a^2b^2$	+	$4ab^3$	+	$1b^4$

Числа обозначение красным цветом соответствуют числам в треугольнике Паскаля. Биномиальные коэффициенты есть коэффициенты разложения многочлена по степеням a и b

Всё не так сложно и запоминается на всю жизнь!

Например:

Найти разложение: $(x+2)^4$

Решение:

Выписываем разложение с неопределенными коэффициентами:

$$(a+b)^4 = A_0b^4 + A_1ab^3 + A_2a^2b^2 + A_3a^3b + A_4a^4$$

В данном примере a=x, b=2 и n=4, т.е. нужно взять четвертую строку треугольника. Подставляем вместо a=x и b=2, получаем:

$$(x+2)^4 = A_0 2^4 + A_1x2^3 + A_2x^2 2^2 + A_3x^3 2 + A_4x^4 = 16A_0 + 8A_1x + 4A_2x^2 + 2A_3x^3 + A_4x^4$$

Теперь берем значения из четвертой строки треугольника и подставляем их по очереди вместо коэффициентов:

$$(x+2)^4 = 16\cdot 1 + 8\cdot 4x + 4\cdot 6x^2 + 2\cdot 4x^3 + 1x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$$

Ответ: $(x+2)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

c) Сумма чисел

Чтобы найти сумму чисел, стоящих на любой диагонали от начала до интересующего нас места, достаточно взглянуть на число, расположенное снизу и слева от последнего слагаемого (слева для правой диагонали, для левой диагонали будет справа, а вообще - ближе к середине треугольника). Пусть, например, мы хотим вычислить сумму чисел натурального ряда от 1 до 9. "Спустившись" по диагонали до числа 9, мы увидим слева снизу от него число 45 (Рис.4) Оно то и дает искомую сумму.

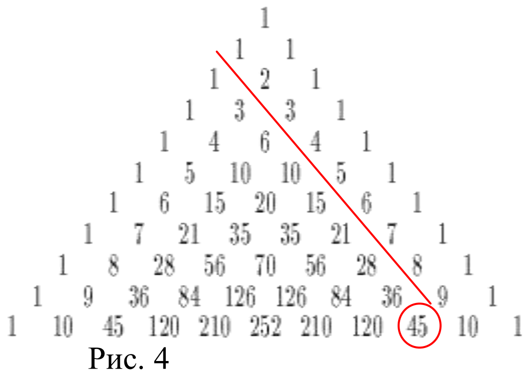


Рис. 4

d) Степени числа 11

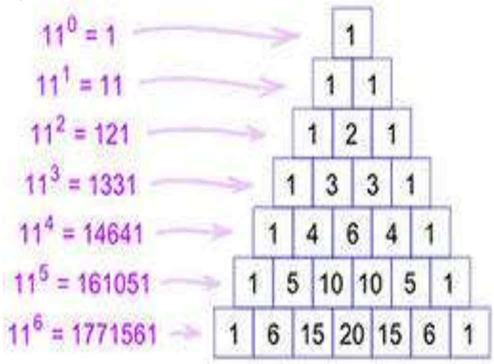


Рис. 5

Если надо вычислить степени числа 11, то для этого может быть использован... треугольник Паскаля (Рис. 5). Цифры, расположенные в третьей, четвертой и пятой строках, образуют число, представляющее собой вторую, третью и четвертую степени числа 11. Значит, для нахождения искомой степени следует нарисовать треугольник Паскаля с соответствующим количеством строк, а это сделать совсем не сложно. Но не все так просто….

Проблема обнаружилась для пятой и выше степеней (не соответствие). И я её решил. Например, рассмотрим соответствующую строчку для нахождения пятой степени числа 11. Если число треугольника Паскаля получается двузначным, то справа на лево в старший разряд перебрасываем количество десятков и складываем с числом стоящим слева. Полученная последовательность и есть результат (рис. 6).

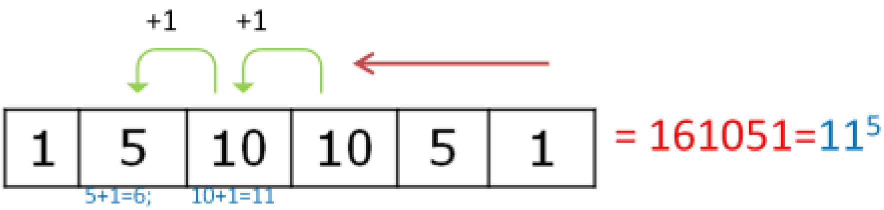


Рис.6

5. Умножение по правилам

a) Приемы быстрого счета: умножение

a.1)Чтобы умножить однозначные числа на многозначные нас учили в младшей школе так: для умножения числа на однозначный множитель (например, 34*9) устно, необходимо выполнять действия, начиная со старшего разряда, последовательно складывая результаты (30*9=270, 4*9=36, 270+36=306).

Умножение 147*8 выполняется в уме так: 147*8=140*8+7*8= 1120 + 56= 1176

На практике удобнее вычислять все подобные примеры так
147*8=(150-3)*8=150*8-3*8=1200-24=1176
Если одно из умножаемых раскладывается на однозначные множители, действие удобно выполнять, последовательно перемножая на эти множители, например:
225*6=225*2*3=450*3=1350
Также, проще может оказаться 225*6=(200+25)*6=200*6+25*6=1200+150=1350

a.2) А теперь попробуйте умножить любое число на $1^1/_2$. Вам потребуется некоторое время. Используя следующие правила, вы потратите несколько секунд (проверенно практически). Чтобы устно умножить число на $1^1/_2$ прибавляют к множимому его половину. Например:
$34*1^1/_2$ = 34 + 17=51
$23*1^1/_2=23 + 11^1/_2 = 34^1/_2$ (или 34,5)
48*1,5= 48+48/2=48+24=72

a.3) Умножение на $2^1/_2$.
Чтобы устно умножить число на $2^1/_2$. к удвоенному числу прибавляют половину множимого. Например: $18*2^1/_2$.=36+9= 45;
$39*2^1/_2$.= 78 + $19^1/_2$.= $97^1/_2$ (или 97,5)
Это легко доказать: $18*2^1/_2=18*(2+^1/_2)=18*2+18*^1/_2=36+9=45$

a.4) Умножать на 5 (Приложение 3) можно так: сначала умножить на 10, а потом разделить на 2. Например: 64*5=64*10:2=320

a.5) Умножение на 8. Чтобы устно умножить число на 8, его трижды удваивают. Например: 217*8 217*2 = 434; 434*2=868; 868*2=1736
А можно и так: 217*8=200*8 +17*8= 1600+136=1736

a.6) Умножение на 9 (Приложение 4)

1) Также есть особенности при умножение на 9. Для того чтобы умножить число на 9 надо к множимому приписать 0 и от получаемого числа отнять множимое, например 45*9=450-45=405;
2) А вот правило умножения на 9 чисел в виде последовательности подряд идущих цифр от 1 до n ($1 \leq n \leq 9$): нужно от числа, состоящего из (n+1) единиц, вычесть число, на 1 большее, чем n
   Например:
   1*9=11-2=9; 12*9=111-3=108; 123*9=1111-4=1107; 1234*9=11111-5=11106

a.7) Приём умножения на 11 (Приложение 2). Это общий приём умножения любого числа на 11. Сначала число умножить на 10, а потом прибавить ещё один раз, одиннадцатый раз, это же самое число. Например: 87·11=87·10+87·1=870+87=957
232·11=232·10+232=2320+232=2552

Приемами, ускоряющими вычисления, могут овладеть и самые обычные люди. Пусть, например, надо умножить 26 на 11. Достаточно сложить цифры 2+6=8 и поставить эту восьмерку между 2 и 6, чтобы сразу сказать ответ: 286. Конечно, при сложении может получиться двузначное число, начинающееся с 1. Тогда эту единицу надо прибавить к цифре десятков, а в середину вставлять только цифру единиц суммы. Например, при умножении 75 на 11 складываем 7 и 5, получим 12, 1 прибавляем к 7, а 2 вставляем между 8 и 5. Получаем ответ 825. Следующее равенство объясняет, на чем основан этот способ умножения:

$$(10a+b)*11 = 110a+11b = 100a+10(a+b) + b$$

b) Приемы быстрого счета: возведение в степень (Приложение 3)

b.1) Возведение числа вида X5 (оканчивающегося пятеркой) в квадрат производится по схеме: умножаем X на X+1 и приписываем 25 справа, то есть

$(X5)^2 = (X*(X+1))*100 + 25$. Например, $65^2 = 6*7$ и приписываем справа 25 = 4225 или $95^2 = 9025$ (9*10 и приписать 25 справа).
Доказательство: $(X*10+5)^2 = X^2*100 + 2*X*10*5 + 25 = X*100*(X+1) + 25$.

Эксперимент 4

Вычислим 35² разными способами и измерим время

Умножение столбиком	**Возведение числа вида X5 в квадрат**
$35^2 = 1225$ $\times$ 35 35 175 +105 1225 13 секунд	$35^2 = 1225$ $3 \cdot 4 = 12$ приписать 25 9 секунд.
Время, затраченное на вычисления	
13 сек	**9 сек**

Умножать столбиком оказалось дольше, чем методом возведения числа вида X5 в квадрат.

b.2) Возведение числа вида A25 (оканчивающихся на 25) в квадрат

Возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 25, выполняется по формуле:
$(A25)^2 = (A*A + A:2)*10*1000 + 625$
Обоснование:
$(A*100 + 25)*(A*100 + 25) = (A^2 + 0.5*A)*10*1000 + 625 = (A*100)^2 + 2*(A*100)*25 + 25^2 = (A*100 + 25)^2$
Пример: $(10225)^2$ =
=(102*102+102:2)*10*1000+625=(10404+51)*10000+625=10455*10000+625= 104550625

b.3) Возведение числа вида A75 (оканчивающихся на 75) в квадрат

Возвести в квадрат оканчивающиеся на 75 числа удобно по формуле:
$(A75)^2 = [(A \| 5) * (A + 1)] \| 625$
(Знак || - означает приписать)
Примеры:
$175^2 = (15 * (1 + 1)) \| 625 = 30625$;
$375^2 = (35 * (3 + 1)) \| 625 = 140625$;
$1175^2 = (115 * (11 + 1)) \| 625 = 1380625$.

b.4) Возведение в квадрат чисел шестого десятка (50……59)

Я удивил своих товарищей способностью в уме возводить в квадрат двузначные числа.
Например:
$51^2=2601$ $56^2=3136$
$52^2=2704$ $59^2=3481$
А правила вычисления вот такие:
Квадрат числа n представляет собой четырехзначное число, у которого:

1. число, образуемое двумя последними цифрами, равно квадрату второй цифры числа n

2. число, образуемое двумя первыми цифрами, равно сумме 25 и второй цифры заданного числа.

b.5) Квадраты чисел 11, 111, 1111 и т.д.

Очень легко запомнить квадраты таких чисел, как 11, 111, 111 и т.д:
11^2=121, 111^2=12321, 1111^2=1234321 и т.д.

6. Система быстрого счета по Трахтенбергу

В нашей школе работает учитель математики Алдушина Галина Ивановна, которая рассказала о своей маме Суворовой Серафиме Васильевне – заслуженном работнике образования, кавалера ордена «Знак почета» за внедрение в школу программы Занкова. Мама Галины Ивановны – была учитель младших классов в сельской школе (с. Коробчеево, Коломенского р-на, Московской области). Еще в 70-е годы, применяла систему Трахтенберга, для улучшения устного счета своих учеников.
Суть приемов, разработанных профессором Трахтенбергом, очень проста. Но конечно, как на всякое новое дело, на усвоение их (особенно для взрослых людей, которым приходится переучиваться, отказываться от прежних привычек) требуется и время, и напряжение. С помощью своего метода Трахтенбергу удалось научить многих детей превосходно, быстро и надежно считать. Более того, обнаружилось, что у этих детей увлечение легкостью и простотой его «волшебных» приемов неизменно переросло в интерес к математике и к учению вообще.
В своей работе я рассмотрю только несколько методов.
И в первом пункте – способ выполнения основных видов умножения, не пользуясь заучиваемой наизусть таблицей умножения. Это не только возможно, но и легко.

a) Умножение на 11 (Приложение 2)

Основные правила умножения на 11 заключаются в следующем:

1. *Последняя цифра множимого (число, которое умножается) записывается как самая правая цифра результата.*
2. *Каждая следующая цифра множимого складывается со своим правым соседом и записывается в результат.*
3. *Первая цифра множимого становится самой левой цифрой результата. Это последний шаг.*

По системе Трахтенберга мы пишем результат, по одной цифре справа налево. Рассмотрим следующую простую задачу: 633 умножить на 11:

$$633 \times 11$$

Ответ пишется под 633, по одной цифре справа налево, как указано в правилах.

Приступим к решению примера.

Первое правило

Напишите последнюю цифру числа 633 в качестве правой цифры результата;

$\underline{633} \times 11$
3

Второе правило

Каждая последующая цифра числа 633 складывается со своим правым соседом и записывается в результат. 3 + 3, будет 6. Перед 3 записываем в результате 6:

$\underline{633} \times 11$
63

Применим правило еще раз: 6 + 3 будет 9. Записываем и эту цифру в результате;

$\underline{633} \times 11$
963

Третье правило

Первая цифра числа 633, т. е. 6, становится левой цифрой результата;

6 3 3 × 1 1
6 9 6 3

О т в е т : 6963.

Большие числа обрабатываются таким же способом. Второе правило («каждая последующая цифра множимого складывается со своим правым соседом») в нашем примере применено дважды; при больших числах это правило может быть применено многократно.

Мы можем вместо трех правил пользоваться только одним, а именно вторым — правилом «прибавьте соседа», если будем применять его следующим образом. Сначала мы должны перед данным числом написать нуль или по крайней мере представить себе, что там находится нуль. Затем мы применяем идею «прибавления соседа» поочередно к каждой цифре данного числа:

0 6 3 3 ×1 1 *«Соседа» нет, следовательно, мы ничего не прибавляем.*
3

0 6 3 3 × 11
9 6 3 *Как ранее*

0 6 3 3 × 11
6 9 6 3 *ноль плюс 6, будет 6*

Этот пример показывает, для чего нам нужен нуль перед множимым. Он должен нам напоминать о том, что действие еще не закончено. Без нуля в начале числа мы могли бы забыть написать последнюю цифру и думать, что ответ равен только 963. Ответ длиннее данного числа на одну цифру, и нуль в начале указывает на это.

Попробуем решить задачу: 441 362 × 11 (записав ее в надлежащей форме).

Если начнем с 2 и будем, двигаясь влево, каждый раз прибавлять «соседа», то получим правильный ответ: 4 854 982.

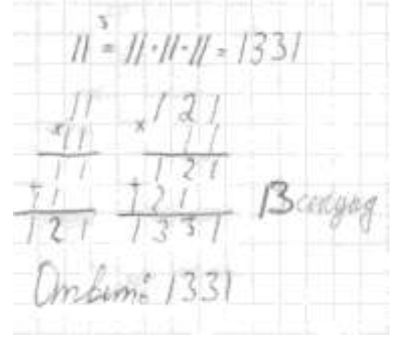
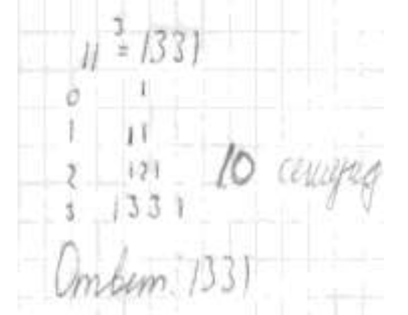
Иногда при сложении числа с его «соседом» в ответе получается число, состоящее из двух цифр, так, 5 и 8 дают 13. В этом случае мы пишете 3 и, как обычно, «переносите» 1. Однако, применяя метод Трахтенберга, никогда не придется переносить чисел, больших, чем 2. Это очень облегчает решение сложных задач. (При переносе единицы достаточно поставить точку, в тех редких случаях, когда переносится двойка, — две точки.)

Если сравнить прием умножения по правилам и метод, предложенный Трахтенбергом, то методом Трахтенберга умножать многозначные числа на 11 оказалось быстрее. Потому, что умножая сначала на 10, а потом, складывая результат с исходным числом, ты затрагиваешь время больше, чем просто складывать «соседей».

Эксперимент 5

Вычислим 11^3 разными способами и измерим время

Умножение столбиком	По Трахтенбергу	Треугольник Паскаля

		
Время, затраченное на вычисление		
13 сек	**12 сек**	**10 сек**

По Трахтенбергу время вычисления оказалось меньше чем столбиком, но больше чем треугольником Паскаля.

b)Умножение на пять (Приложение 3)

При рассмотренном методе выше нужно производить деление на 2 многозначного числа, а в данном методе делим на два однозначное число, а это делается легче и быстрее. Рассмотрим метод по Трахтенбергу.

Если цифра нечетная, берем половину соседа и прибавляем 5. Если цифра четная, пишем половину соседа.

Предположим, мы хотим 426 умножить на 5:

0 4 2 6 ×5 — *Смотрим на цифру 6, она четная; 5 не прибавляется (соседа нет).*
0

0 4 2 6 × 5 — *Смотрим на цифру 2, она четная; пишем половину от 6.*
3 0

0 4 2 6 × 5 — *Смотрим на цифру 4, она четная; пишем половину от 2.*
1 3 0

0 4 2 6 × 5 — *Смотрим на 0, цифра четная; возьмем половину от 4.*
2 1 3 0

Если бы мы имели во множимом нечетную цифру, мы бы прибавляли 5:

0 4 3 6 × 5 — *Как выше*
0

0 4 3 6 × 5
8 0 — *3—нечетная; 5 плюс половина соседа (3), т. е. 8.*

0 4 3 6 × 5
2 1 8 0

Все это легко выполнимо. Вычислений тут очень мало.

c) Умножение на девять (Приложение 4)

Сначала потренируемся.

Проверьте быстроту своей реакции — посмотрите на каждую из следующих цифр и тотчас же скажите получаемый результат после вычета ее из 10:

7, 6, 9, 2, 8, 1, 7, 4, 2, 3, 9, 6, 5, 3, 1, 9.

Иногда нам придется вычитать цифру не из 10, а из 9. Мы смотрим, например, на цифру 7 и тут же говорим «2». Попробуйте как можно быстрее проделать это со следующими цифрами:

7 , 8 , 2 , 4, 9, 5 , 1 , 7 , 2 , 0, 3 , 8 , 6 , 5 , 1 , 0 .

Теперь вы сможете легко и быстро умножать на 9, не пользуясь таблицей умножения. Лучше всего это пояснит правило, которое нет необходимости выучивать наизусть, ибо после некоторой тренировки оно само закрепится в нашей памяти.

Правило это гласит:

1. *Вычтите правую цифру большого числа из 10. Это дает правую цифру результата.*

2. *Возьмите поочередно каждую из следующих цифр до самой последней, вычтите ее из 9 и прибавьте соседа.*

3. *В последнем шаге, когда вы будете рассматривать цифру нуль, стоящую перед длинным числом, вычтите 1 из соседа, и полученное число будет самой левой цифрой результата.*

Если имеется точка (перенесенная 1), то, при всех этих шагах, как обычно, ее прибавляем. Рассмотрим пример: 8769 умножить на 9:

Во-первых, вычитаем 9 из 10, получаем 1.

Во-вторых, вычитаем 6 из 9 (получаем 3) и прибавляем соседа (9).

Результат — 12, поэтому мы пишем точку и 2.

В-третьих, 7 вычитаем из 9 (получаем 2), плюс сосед (6), будет 8 и «плюс точка», будет 9.

В-четвертых, 8 вычитаем из 9, будет 1, плюс сосед, будет 8.

В-пятых, это последний шаг; мы рассматриваем самую левую цифру — нуль, поэтому мы уменьшаем самую левую цифру от числа 8769 на 1, и 7 становится самой левой цифрой результата.

Попробуйте сами умножить 8888 на 9: 08888 × 9

Самой правой цифрой результата будет 2, так как, вычитая 8 из 10, мы получим 2. В данном случае нет точек, нет переноса, и самой левой цифрой результата будет 7 (т. е. самая левая цифра —8 минус 1).

О т в е т : 799 992.

Умножение столбиком	**Метод Трахтенберга**
1376 × 9 = 12384 ×1376 9 12384 9 секунд	1376 × 9 = 12384 1) 10 − 6 = 4 2) 9 − 7 + 6 = 8 3) 9 − 3 + 7 = 13 4) 9 − 1 + 3 + 1 = 12 13 секунд.
Время, затраченное на вычисления	
9 сек	**13 сек**

d) Умножение двузначных чисел на двузначные прямым методом (Приложение 1)

Прямой метод начнем рассматривать с простого примера и от него двигаться к решению более сложных.

Предположим, мы хотим 23 умножить на 14. Мы пишем это по следующей форме:

0 0 2 3 × 14
(результат пишется под чертой.)

Запомним, прежде всего, что при перемножении двузначных чисел мы ставим перед множимым 2 нуля.

Ответ пишется под 0023, цифра за цифрой, начиная справа. Это означает, что последнюю цифру ответа мы должны написать под 3 и, двигаясь влево цифра за цифрой, записать оставшуюся часть ответа.

П е р в ы й ш а г . Умножим крайнюю справа цифру множимого (3) на крайнюю справа цифру множителя (4). В ответе мы записываем 2 от числа 12 и переносим 1 (используя точку);

$\underline{0\ 0\ 2\ 3}$ × 14
2 *3 × 4 = 12; пишем 2 и переносим 1*

В т о р о й ш а г . Следующая цифра результата пишется цифрой справа от 2, она получается путем сложения двух промежуточных слагаемых. Одно из них (8) получается при умножении цифр 2 и 4.Второе промежуточное слагаемое получается в результате перемножения 3 и 1.
Сложим теперь оба промежуточных результата: 8 + 3 = 11; прибавим теперь перенесенную 1, так что следующая «цифра» ответа будет 12; значит, пишем 2 и 1 переносим:

$\underline{0\ 0\ 2\ 3}$ × 14
2 2 *2 × 4 =8; 3 × 1 = 3; 8+ 3 =* 11; *прибавляя перенесенную 1, получим 12.*

П о с л е д н и й ш а г . Умножим левую цифру множимого (2) на левую цифру множителя (1):

$\underline{0\ 0\ 2\ 3}$ × 14
3 2 2 *2 × 1 = 2 плюс перенесенная 1, будет 3.*

В этом случае нам нет необходимости использовать левый нуль, который мы написали перед числом. Нуль стоит там только для того, чтобы дать место для переносимой цифры в том случае, когда встретится число, большее или равное 10.

Второй шаг является для нас новым. Для получения одной цифры результата мы использовали 4 цифры сомножителей. Промежуточные результаты (8 и 3) мы получили в результате перемножения двух пар чисел, которые мы будем называть «внешней парой» и «внутренней парой».

Примеры внутренних и внешних пар:

46 × 87	72 × 34
4 × 7 *внешняя пара*	7 × 4 *внешняя пара*
6 × 8 *внутренняя пара*	2 × 3 *внутренняя пара*

е) Многозначные множимые (Приложение 1)

Когда множимое содержит более двух знаков, мы должны повторять второй шаг столько раз, сколько потребует данное чисто. Предположим, например, мы хотим 312 умножить на 14. В этом случае всего лишь три цифры вместо двух, однако, он проиллюстрирует суть приема:

П е р в ы й ш а г . Умножим правую цифру числа 312 на правую цифру числа 14:

$$\underline{00312} \times 14$$
$$8$$

В т о р о й ш а г . Используем теперь внешнюю и внутреннюю пары. Следующая цифра, которую мы обрабатываем, это 1 из числа 312. Это цифра, которая стоит прямо над местом, куда станет очередная цифра ответа. Значит, 1 — часть внешней пары:

$$\begin{array}{l} \underline{0\ 0\ 3\ 1\ 2} \times 1\ 4 \\ \underline{\quad\quad 6\ 8} \\ \quad\quad 4 \\ \quad\quad + \\ \quad\quad 2 \end{array}$$

Внешняя пара: 1×4, дает 4;
Внутренняя пара: 2×1, дает 2;
4+2, будет 6

Т р е т и й ш а г . Повторяется второй шаг, но с передвижением пар. Это означает, что мы получаем другие пары чисел, однако по-прежнему следующая цифра числа 312, которую мы используем, стоит над очередным подлежащим заполнению местом и является частью внешней пары. В этом примере цифра 3 есть часть нашей новой внешней пары. Итак, мы имеем:

$$\begin{array}{l} \underline{0\ 0\ 3\ 1\ 2} \times 1\ 4 \\ \underline{\quad 3\ 6\ 8} \\ 1\ 2 \\ \quad + \\ \quad 1 \end{array}$$

Внешняя пара: 3×4=12;
Внутренняя пара: 1×1=1;
12+1=13; пишем 3 и переносим 1.

П о с л е д н и й ш а г . Чтобы найти левую цифру ответа, перемножим обе левые цифры (3 и 1) и затем прибавим перенесенную 1:

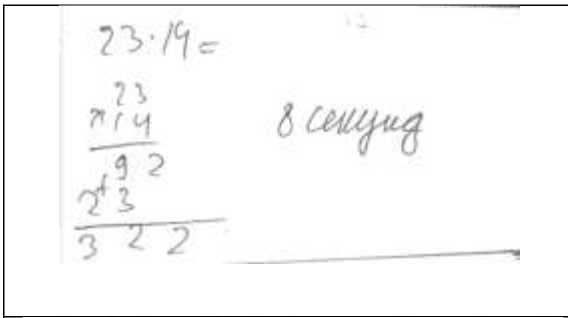
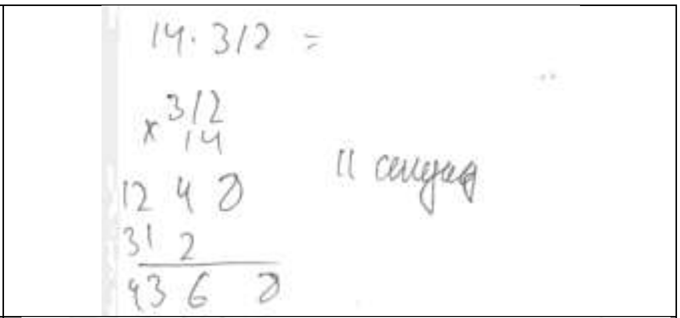
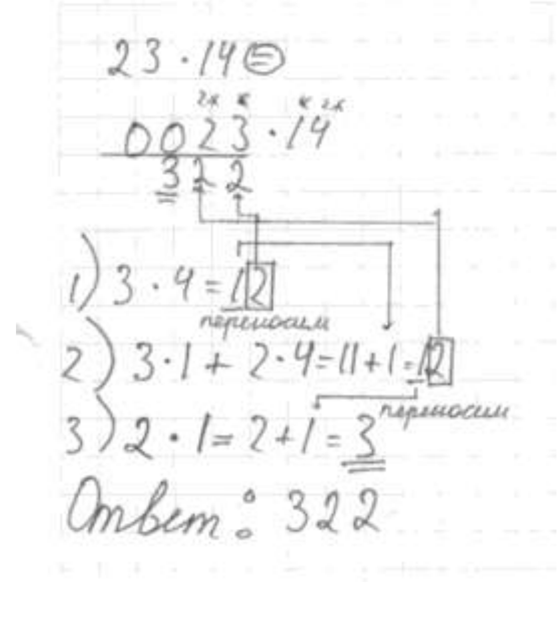
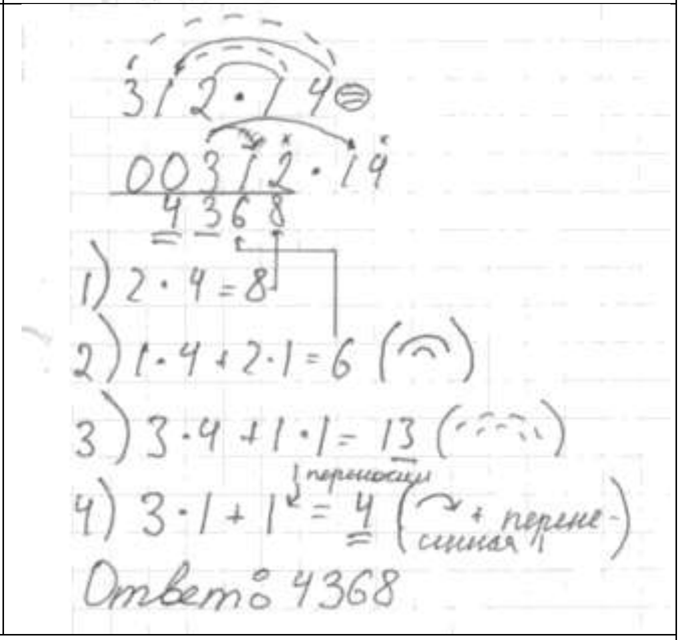
$$\begin{array}{l} \underline{0\ 0\ 3\ 1\ 2} \times 1\ 4 \\ \underline{\ 4\ 3\ 6\ 8} \\ \ 3\times 1 \\ \quad + \\ \text{точка} \end{array}$$

Правило для проверки вычислений таково:
Сумма цифр произведения должна быть равна сумме цифр произведения сумм цифр множителя и множимого
Если они не равны, значит, где-то сделана ошибка.

Эксперимент 6

Выполним вычисления и измерим время

23*14	312*14

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Время затраченное на вычисление классическим методом</td></tr>
<tr><td>8 сек</td><td>11 сек</td></tr>
<tr><td colspan="2">Время затраченное на вычисление методом Трахтенберга</td></tr>
<tr><td>27 сек</td><td>30 сек</td></tr>
</table>

Если продолжать тренироваться вычислять, используя метод Трахтенберга, то время, затраченное на вычисление уменьшается.

Вывод. Подтверждение гипотезы.

В этой работе была сделана попытка изучить разработанные способы счета с использованием правила дополнений, решетку Непера, треугольник Паскаля, систем быстрого счета по Трахтенбергу и показать, что все эти способы позволяют быстро и правильно считать даже не используя калькулятор, развить ум, память. Мною сделан вывод, о том, что «крестьянский» метод и метод древних египтян нужен тому, кто забыл таблицу умножения; треугольник Паскаля хорошо использовать для нахождения степени числа 11, сумму чисел натурального ряда и разложения на биномиальные коэффициенты. При выполнении вычислений по Трахтенбергу приходится несколько перестраивать ход своих мыслей. Этот метод дает возможность постепенно развивать способность сосредоточиваться. Эта способность является лучшей гарантией против ошибок, так что потребность в проверках, как таковых, становится все меньше.

Оказывается, были забыты правила сокращенного умножения, которые помогают быстро и правильно считать, это показал мониторинг среди учащихся 9 классов. Почти 70% забыли и не помнят эти правила.

Обо всех этих методах я рассказал своим одноклассникам на неделе математики.

Но больше всего понравилось умножать «решеткой» Непера.

Чтобы оценить преимущества умножения решеткой, я предложил своим одноклассникам получить произведения, скажем чисел 53896 и 274 используя умножения “в столбик” и этот способ. Затем сравнил время, требующееся для получения произведения. После непродолжительных тренировок время, затраченное на нахождения произведения «решеткой» оказалось меньше, чем обычным способом.

В моем эксперименте участвовал класс, в котором я учусь. **Мои эксперименты доказали мою гипотезу.**

При выполнении вычислений, в каждом отдельном случае, вы можете сделать выбор по собственному усмотрению.

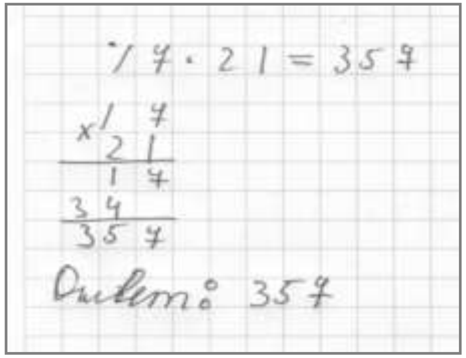
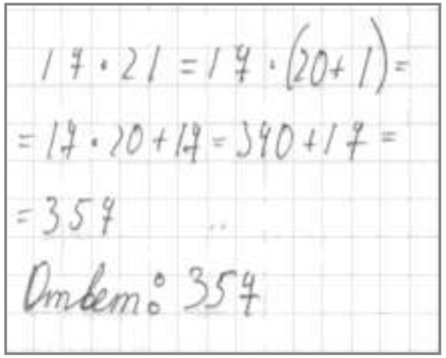
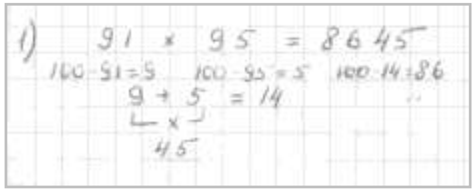
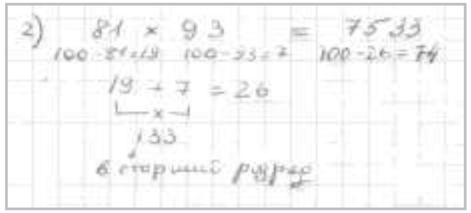
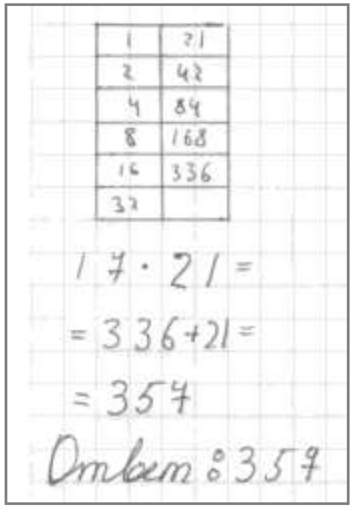
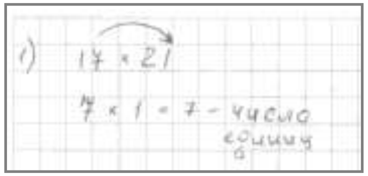
Успешное освоение этих навыков придаст нам чувство уверенности в своих силах, следствием которого неизменно бывает повышенный интерес к математике.

Литература:

1. Газета «Информатика» №19,20/2005
2. Газета «Информатика» №10/2006
3. Энциклопедия для детей. Т.11. Математика/ Сост. Аксенова М.Д. – М.: Аванта+, 2002.
4. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Савин А.П. – Педагогика, 1989.
5. Трилогия о математике/А. Реньин – МИР, 1980
6. Блез Паскаль/ Е. Мурашова – Белый Город, 2006
7. Система быстрого счета по Трахтенбергу/ Э.Катлер, Р. Мак- Шейн- ПРОСВЕЩЕНИЕ, М. 1967

Приложение 1

Сводная таблица вычислений различными приемами

Традиционный метод (умножение столбиком)	Метод сокращенного умножения	Метод умножение «Решеткой»	Метод дополнений
		 Складываем числа по диагонали	
Египетский метод	**«Крестьянский метод»**	**Метод по Трахтенбергу**	
	 Вычеркиваем четные числа		

Приложение 2

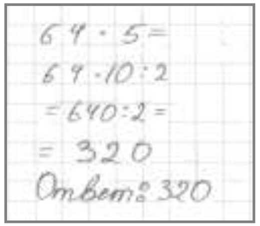
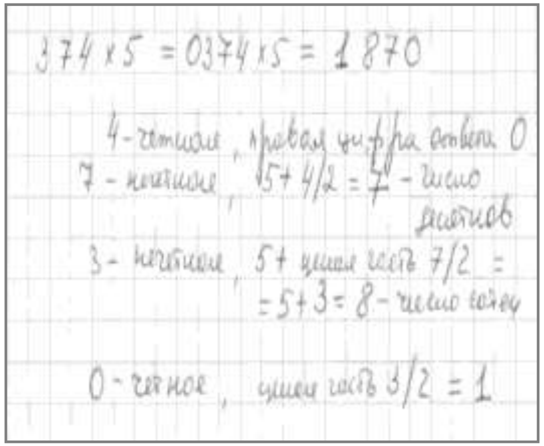
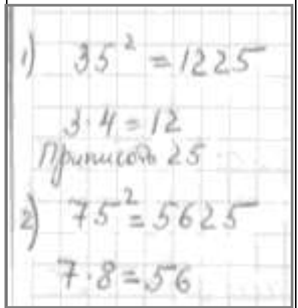
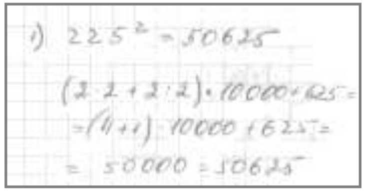
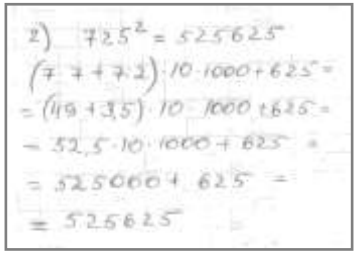
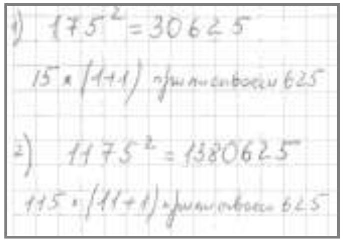
Приемы умножения на 11

Общий прием	Прием ускоряющий вычисления	Метод по Трахтенбергу	Треугольник Паскаля и степени числа 11
$26 \cdot 11 = 26 \cdot 10 +$ $+ 26 = 260 + 26 =$ $= 286$ Ответ: 286 $85 \times 11 =$ $= 85 \cdot 10 + 85 =$ $= 850 + 85 =$ $= 935$ Ответ: 935	$26 \cdot 11 =$ $2 + 6 = 8$ 8 поставим между 2 и 6 Ответ: 286 $85 \times 11 = 935$ $8 + 5 = 13 \rightarrow$ поставим между 8 и 5 единицу в старший разряд $8 + 1 = 9$	$286 \times 11 = 3146$ 1) Цифра 6 – правая цифра результата 2) $8 + 6 = 14$ Цифра 4 – разряд десятков, 1 в старший разряд 3) $2 + 8 = 10$ $10 + 1 = 11$ Цифра 1 – разряд сотен, 1 – в старший разряд 4) $2 + 1 = 3$ Цифра 3 – левая цифра результата	0 1 1 1 1 2 1 2 1 3 1 3 3 1 4 1 4 6 4 1 Ответ: $11^4 = 14641$

А это надо запомнить: $11^2=121$, $111^2=12321$, $1111^2=1234321$ и т.д.

Приложение 3

Методы умножения на 5 и возведение в квадрат

Прием, ускоряющий вычисления	Метод по Трахтенбергу	Возведение в квадрат числа, вида…		
		A5	**A25**	**A75**
 64 · 5 = 64 · 10 : 2 = 640 : 2 = = 320 Ответ: 320	 374 × 5 = 0374 × 5 = 1870 4 - чётное, правая цифра ответа 0 7 - нечётное, 5 + 4/2 = 7 - число десятков 3 - нечётное, 5 + целая часть 7/2 = = 5 + 3 = 8 - число сотен 0 - чётное, целая часть 3/2 = 1	 1) 35² = 1225 3 · 4 = 12 Приписать 25 2) 75² = 5625 7 · 8 = 56 $(X5)^2 =$ $(X*(X+1))*100 +$ $+25$	 1) 225² = 50625 (2 · 2 + 2 : 2) · 10000 + 625 = = (4 + 1) · 10000 + 625 = = 50000 + 50625  2) 725² = 525625 (7 · 7 + 7 : 2) · 10 · 1000 + 625 = = (49 + 3,5) · 10 · 1000 + 625 = = 52,5 · 10 · 1000 + 625 = = 525000 + 625 = = 525625 **$(A25)^2 = (A*A + A:2)*10*1000 + 625$**	 1) 175² = 30625 15 × (1+1) приписываем 625 2) 1175² = 1380625 115 × (11+1) приписываем 625 **$(A75)^2 = [(A \| 5) * (A + 1)] \|\| 625$** *(Знак || - означает приписать)*

Приложение 4

Умножение на 9

Прием ускоряющий вычисления	Умножение на 9 подряд идущих цифр	Метод по Трахтенбергу